შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	17.04.2011/ მათ/ II/ 171

ამოცანა № 1 | გვერდი № 1

$f(x)+f(y) \geq 2f(x+y)$

$f(x)+f(y)+f(z) \geqslant 3f(x+y+z)$ გავამრავლოთ 2 ზე და ვ.დ.

$2(f(x)+f(y)+f(z)) \geqslant 6f(x+y+z)$.

$2(f(x)+f(y)+f(z)) \geq f(x)+f(y)+f(x)+f(z)+f(y)+f(z) \geq 2f(x+y)+2f(x+z)$
$+2f(y+z) \Rightarrow$

$2(f(x)+f(y)+f(z)) \geqslant 2f(x+y)+2f(x+z)+2f(y+z)$

$f(x)+f(y)+f(z) \geqslant f(x+y)+f(x+z)+f(y+z)$

დავამატოთ ორივე მხარეს $f(x)+f(y)+f(z)$

$2(f(x)+f(y)+f(z)) \geqslant f(x+y)+f(z)+f(x+z)+f(y)+f(y+z)+f(x)$.

$f(x+y)+f(z) \geqslant 2f(x+y+z)$

$f(x+z)+f(y) \geqslant 2f(x+y+z)$

$f(z+y)+f(x) \geq 2f(x+y+z)$.

$2(f(x)+f(y)+f(z)) \geqslant f(x+y)+f(z)+f(x+z)+f(y)+f(y+z)+f(x) \geqslant$

$\geqslant 6f(x+y+z) \Rightarrow$

$f(x)+f(y)+f(z) \geqslant 3f(x+y+z)$

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

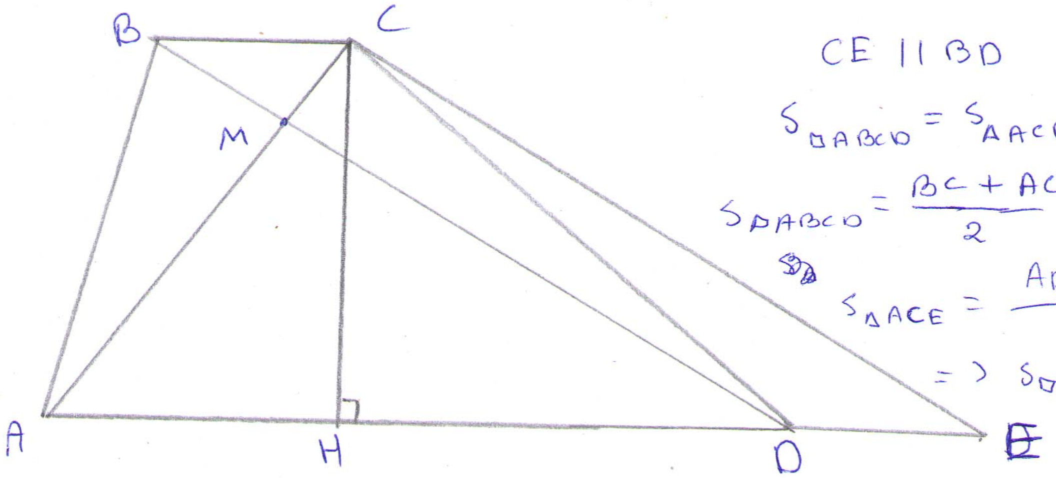
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 171

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



$CE \parallel BD \quad CE = BD$

$S_{\square ABCD} = S_{\triangle ACE}$ რადგან

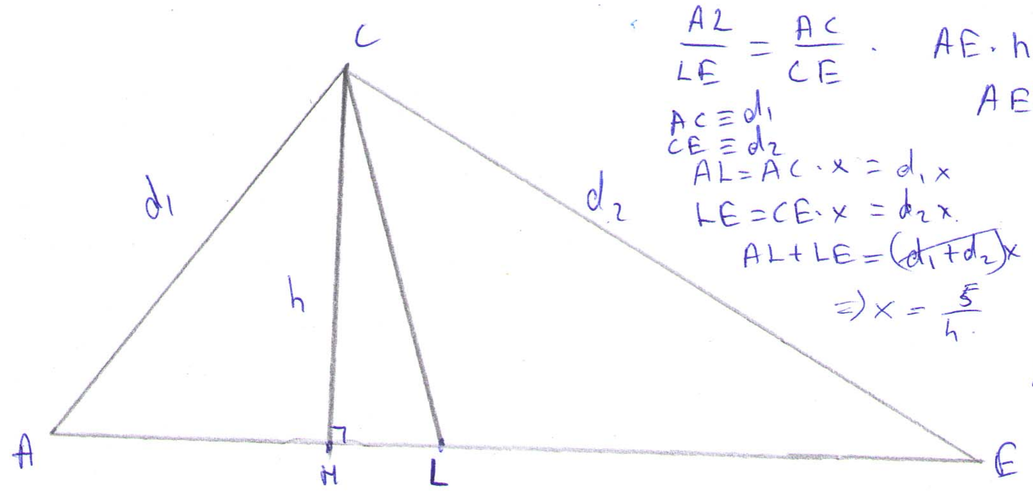
$S_{\square ABCD} = \frac{BC + AC}{2} \cdot h$ BCDE - პარალელოგრამია ანუ $BC = DE$

$S_{\triangle ACE} = \frac{AD + DE}{2} \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\square ABCD} = S_{\triangle ACE}$

განვიხილოთ $\triangle ACE$

გავავლოთ $\angle C$-ს ბისექტრისა.



$\frac{AL}{LE} = \frac{AC}{CE}$. $\quad AE \cdot h = 2S = 100.$

$AC \equiv d_1$

$CE \equiv d_2$

$AE = \frac{100}{h} = \frac{5(d_1 + d_2)}{h}$

$AL = AC \cdot x = d_1 x$

$LE = CE \cdot x = d_2 x$

$AL + LE = (d_1 + d_2)x = \frac{5(d_1 + d_2)}{h} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{5}{h}$

$AL = \frac{5d_1}{h}$

$LE = \frac{5d_2}{h}$

$CH \equiv h$

$AH = \sqrt{d_1^2 - h^2}$

$HL = AL - AH = \frac{5d_1}{h} - \sqrt{d_1^2 - h^2}$

$HE = \sqrt{d_2^2 - h^2}$

$HL = HE - LE = \sqrt{d_2^2 - h^2} - \frac{5d_2}{h}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 171

ამოცანა № 2

გვერდი № 2

$$\frac{5d_1}{h} - \sqrt{d_1^2-h^2} = \sqrt{d_2^2-h^2} - \frac{5d_2}{h}$$

$$\frac{5d_1}{h} + \frac{5d_2}{h} = \sqrt{d_2^2-h^2} + \sqrt{d_1^2-h^2}$$

$$25(d_1+d_2)^2 = h^2\left(d_2^2-h^2+d_1^2-h^2+2\sqrt{d_1^2d_2^2-h^2(d_1^2+d_2^2)+h^4}\right)$$

$$25(d_1+d_2)^2-h^2(d_1^2+d_2^2)+2h^4 = 2h\sqrt{d_1^2d_2^2-h^2(d_1^2+d^2)+h^4}$$

$$625(d_1+d_2)^4+h^4(d_1^2+d_2^2)^2+4h^8+100(d_1+d_2)^2h^4-50(d_1+d_2)^2h^2(d_1^2+d_2^2)-4h^6(d_1^2+d_2^2)=$$
$$=4h^2d_1^2d_2^2-4h^4(d_1^2+d_2^2)+4h^6$$

აქიდან მივიღებთ d_1+d_2-ზე დამოკიდებულ h-ის მერვე განტოლებას
ხოლო h-ის მაქსიმუმი იქნება $5\sqrt{2}$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 171

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$(a;b;c) \Rightarrow a \le b \le c$

$a+b+c \vdots a \Rightarrow b+c \vdots a$

$a+b+c \vdots b \Rightarrow a+c \vdots b$

$a+b+c \vdots c \Rightarrow a+b \vdots c$

რადგან $a+b \vdots c \Rightarrow a+b \ge c$

$a \le c \quad b \le c \Rightarrow a+b \le 2c$

ანუ $a+b=c$ ან $a+b=2c$. რადგან სხვა შემთხვევაში $c < a+b < 2c$ $a+b \not\vdots c$ რადგან არაფერი არ დაიყოფა.

ა) ვთქვათ $a+b=2c$ რადგან $a \le c$ $b \le c \Rightarrow a=c$ $b=c$.

ანუ $a=b=c$ ვიპოვეთ ყველა წყვილი რომელიც გვინდოდა.

$1 \le i \le 2011$ $(i;i;i)$-ის წყვილი იქნება.

ბ) ვთქვათ $a+b=c$ ანუ რადგან $a+b+c \vdots a \Rightarrow 2c \vdots a$

$a+b+c \vdots b \Rightarrow 2c \vdots b$ ვთქვათ 1) $2 \not\vdots b$ მაშინ $c \vdots b$ ანუ $b \le c$

თუ კი $b=c$ მაშინ $a=0$ რაც ეწინააღმდეგება $b+c \not\vdots 0$

ანუ $b<c$ მაშინ ხდება $c \vdots b$ ანუ $b \le \frac{c}{2}$. თუ $b < \frac{c}{2}$

მაშინ $a \le b < \frac{c}{2}$ $a+b<c$. რაც ჩვენ დაშვებას ეწინააღმდეგება.

ანუ $b=\frac{c}{2} \Rightarrow a=\frac{c}{2}$. $a+b+c \vdots a$ $a+b+c \vdots b$ $a+b+c \vdots c$

ანუ ისევ ვიპოვეთ ისევ წყვილები $1 \le i \le 1005$ ესენი

$(i;i;2i)$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	17.04.2011/ მათ/ II/ 171

ამოცანა № 3 გვერდი № 2

2) $2|b$ ანუ ~~2|a~~ ~~ხდება~~ $b=2k$ მაშინ

სამეული იქნება $(k;2k;3k)$. $k+2k+3k \vdots k$ $k+2k+3k \vdots 2k$ $k+2k+3k \vdots 3k$.

$1 \le i \le \left[\frac{2010}{3}\right] = 670$. $(i;2i;3i)$

დავთვალოთ კარგების სამეულები.

როცა $(i;i;i)$ $1 \le i \le 2010$ ასეთების i-ების გადანაცვლებით იგივე მიიღება ანუ ასეთი სამეულები ყოფილა 2010-ი

როცა $(i;i;2\cdot i)$ $1 \le i \le 1005$ მათ გადანაცვლებით მიიღება მხოლოდ 3 ვარიანტი. ანუ სულ $3 \cdot 1005 = 3015$.

როცა $(i;2i;3i)$ $1 \le i \le 670$ მათ გადანაცვლებს არის $3! = 6$ ანუ სულ $6 \cdot 670 = 4020$

პასუხი: $2010 + 3015 + 4020 = \underline{9045}$.